令和5年度　入学試験問題

数　　　学

10

(前期日程・私費外国人留学生選抜)

「解答はじめ」の合図があるまでは問題冊子を開いてはいけません。

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページから5ページまでの綴りでできています。「解答はじめ」の合図の後，ページの落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明なものがあれば，手をあげて試験監督者に申し出てください。
2. 問題は4問あり，それぞれに解答用紙が1枚 (表裏計2ページ) ずつ，合計4枚 (8ページ) あります。4枚の解答用紙のすべての表に受験番号を必ず記入してください。解答用紙の裏には受験番号を記入する必要はありません。
3. 解答は該当する解答用紙に記入してください。解答用紙の表と裏では上下が逆になっています。記入の際には注意してください。
4. 問題冊子の空白のページや余白は，下書きに使用してください。
5. 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

$\boxed{1}$

$a \fallingdotseq 0$ を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=-x+2a\sqrt{x-3}$ とする。曲線 $C : y=f(x)$ の点 $(7,\ f(7))$ における接線 l が，点 A$(4,\ 0)$ と直線 $y=x-2$ 上のある点 P とを結ぶ線分 AP の垂直二等分線となるとき，次に答えよ。

(i) 接線 l の方程式を a を用いて表せ。

(ii) a をすべて求めよ。

(iii) 原点を通り接線 l に平行な直線を m とする。曲線 C と直線 m で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$

関数 $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}, \quad f_3(x) = \cos(\pi x),$$
$$f_4(x) = xe^x, \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad f_6(x) = \sin(\pi x)$$

次に答えよ。

(i) $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について，$f_n'(0)$ および $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ。

以下では，(i) で得られた値が 1 つずつ書かれた 12 枚のカードから 1 枚を抜き出し，値を調べてからもとに戻すことを 3 回繰り返す。1 回目，2 回目，3 回目に調べた値をそれぞれ a，b，c とする。

(ii) $ab = 0$ となる確率を求めよ。

(iii) $ab = c$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

四面体 OABC は $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 1$，$\mathrm{OB} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{4}$ をみたしている。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{COA} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ として，次に答えよ。

(i) 線分 AB の長さおよび内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(ii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および三角形 ABC の面積 S を θ を用いて表せ。

(iii) 3点 A，B，C の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 OH と α が垂直になるように選ぶ。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および θ を用いて表せ。

(iv) (iii) の点 H に対して，線分 OH の長さを θ を用いて表せ。

(v) 四面体 OABC の体積を V とする。V を θ を用いて表せ。また，θ が変化するとき，V の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

複素数 α について，実部を $\mathrm{Re}(\alpha)$，虚部を $\mathrm{Im}(\alpha)$ とおく。次に答えよ。

(i) 複素数 z について，方程式 $\dfrac{z-1}{z}=z$ を解け。

(ii) 整数 a，b，c，d は $ad-bc=1$ をみたしている。等式

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \qquad (cz+d \neq 0)$$

が成り立つことを示せ。

以下では，複素数 z について，

$$\text{条件 P：}\quad |z|=1,\quad -\frac{1}{2}<\mathrm{Re}(z) \leqq \frac{1}{2}$$

を考える。

(iii) ある整数 m，n について，$|mz+n|=1$ と条件 P をみたす複素数 z が存在する。このとき，m，n の組をすべて求めよ。

(iv) $ad-bc=1$，$b<0$ をみたすある整数 a，b，c，d について，$\dfrac{az+b}{cz+d}=z$ と条件 P をみたす複素数 z が存在する。このとき，a，b，c，d の組をすべて求めよ。